

Au début de l'année 2021, une colonie d'oiseaux comptait 40 individus. L'observation conduit à modéliser l'évolution de la population par la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 40 \\ u_{n+1} & = & 0,008u_n(200 - u_n) \end{cases}$$

où u_n désigne le nombre d'individus au début de l'année $(2021 + n)$.

1. Donner une estimation, selon ce modèle, du nombre d'oiseaux dans la colonie au début de l'année 2022.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 100]$ par $f(x) = 0,008x(200 - x)$.

2. Résoudre dans l'intervalle $[0; 100]$ l'équation $f(x) = x$.
3.
 - a. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0; 100]$ et dresser son tableau de variations.
 - b. En remarquant que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$ démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 100.$$

- c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
 - d. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n) . Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. On considère l'algorithme suivant :

```
def seuil(p) :
  n=0
  u = 40
  while u < p :
    n =n+1
    u = 0.008*u*(200-u)
  return(n+2021)
```

L'exécution de `seuil(100)` ne renvoie aucune valeur. Expliquer pourquoi à l'aide de la question 3.